

Résolution exacte du pendule simple

Fonctions elliptiques de Jacobi

Noah Roetman

Équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Énergie mécanique

$$E(t) = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta)$$

Conservation de l'énergie mécanique :

$$E(\theta) = E(0)$$

$$\frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 + mgl(1 - \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta_0)$$

Donc, en simplifiant par ml^2 :

$$\frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{g}{l}(1 - \cos \theta) = \frac{g}{l}(1 - \cos \theta_0)$$

On sait que :

$$\cos \theta = 1 - 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\dot{\theta}^2 = \frac{4g}{l} \left(\sin^2 \frac{\theta_0}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} \right)$$

Changement de variable

On pose :

$$k = \sin \frac{\theta_0}{2}, \quad \sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi$$

Alors :

$$\cos^2 \frac{\theta}{2} = 1 - k^2 \sin^2 \varphi$$

En dérivant :

$$\frac{1}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta = k \cos \varphi d\varphi$$

Donc :

$$d\theta = \frac{2k \cos \varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi$$

Et :

$$\sqrt{k^2 - \sin^2 \frac{\theta}{2}} = k \cos \varphi$$

Intégrale elliptique

En remplaçant dans l'équation différentielle :

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

En intégrant :

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\varphi \frac{d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$$

C'est l'intégrale elliptique incomplète de première espèce :

$$F(\varphi, k)$$

Solution avec fonctions de Jacobi

En utilisant les fonctions elliptiques de Jacobi am et sn :

$$\varphi = \operatorname{am}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t, k\right), \quad \sin \varphi = \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t, k\right)$$

Donc :

$$\sin \frac{\theta}{2} = k \sin \varphi$$

Donc :

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left(k \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t, k\right) \right)$$

D'où la solution finale :

$$\theta(t) = 2 \arcsin \left(\sin \frac{\theta_0}{2} \cdot \operatorname{sn}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t, \sin \frac{\theta_0}{2}\right) \right)$$